CALCOLIAMO

NUOVE TECNICHE PER IL CALCOLO MENTALE E SCRITTO

MANUALE DI BASE PER INSEGNANTI DELLA SCUOLA PRIMARIA

RICERCA E SPERIMENTAZIONE DEL MAESTRO GABRIELE CARBONARI

INTRODUZIONE

I contenuti di questa guida provengono dalla matematica vedica realizzata dallo studioso Shri Bharati Krishna Tirthaji, dagli studi dei ricercatori Bill Handley, Jakov Trachtenberg, Hang Young Pai e dalla sperimentazione del maestro Gabriele Carbonari.

La flessibilità del calcolo suggerita da queste tecniche, come ad esempio, il poter scegliere tra diverse procedure; il calcolare da sinistra a destra o da destra a sinistra; il poter rappresentare ed usare i numeri in modo diverso… sviluppa nei bambini creatività, intuizione ed agilità mentale.

Queste tecniche non hanno l'obiettivo di sostituire l'aritmetica tradizionale, ma di offrire agli alunni diverse opportunità di una stessa procedura.

Il principio base a cui si ispira questo libro è il seguente:

"Se c'è un modo semplice di fare un certo calcolo, perché farlo con una tecnica difficile e faticosa?"

Infatti il modo più facile di risolvere un'operazione è anche il più veloce, con meno probabilità di errori.

Un cenno a parte merita la divisione. Spesso questa operazione rappresenta un ostacolo per i bambini. Abbiamo proposto due percorsi fondamentali:

Il passaggio dalle "storie matematiche alla divisione canadese" che è senz'altro la procedura più semplice per aiutare il bambino a comprendere i meccanismi della divisione in colonna.

La "divisione diretta" della matematica vedica è talmente semplice e veloce che gli altri penseranno di avere davanti un genio della matematica.

La semplicità delle tecniche proposte crea nel bambino un atteggiamento positivo nei confronti della matematica e un'atmosfera di serenità.

PREREQUISITI

Gli alunni per eseguire con facilità le tecniche illustrate nel libro, devono possedere le seguenti conoscenze ed abilità:

- Conoscenza aritmetica di base delle quattro operazioni e della loro esecuzione con il metodo tradizionale.
- Conoscenza del significato di doppio e metà.
- Conoscenza della composizione e scomposizione dei numeri naturali e decimali.
- Abilità nel saper calcolare con esattezza addizioni e sottrazioni di numeri entro il venti.
- Abilità nella conoscenza delle tabelline.

capitolo uno

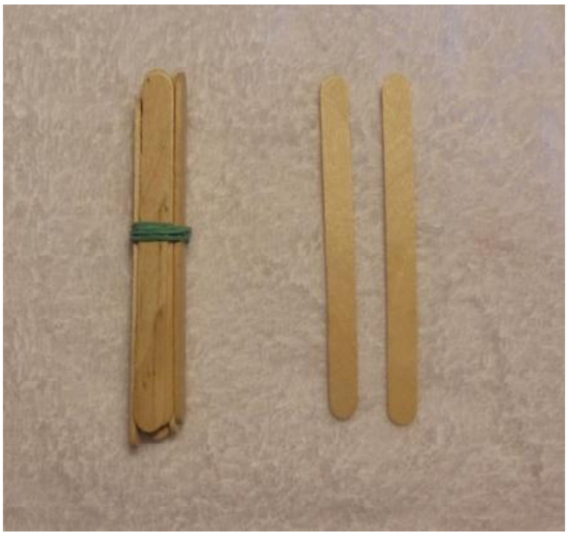
SUGGERIMENTI PER LA CLASSE SECONDA

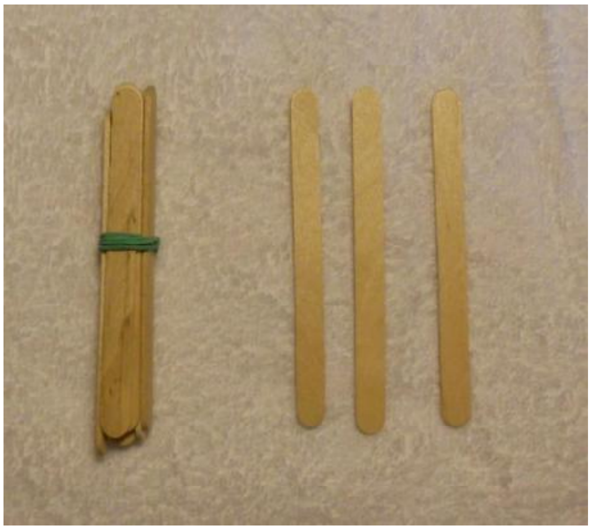
Per mettere in pratica in modo facile e veloce le tecniche che presenteremo nei prossimi capitoli, diventa fondamentale la conoscenza delle addizioni e sottrazioni entro il venti e delle tabelline.

In questo capitolo ci sono alcuni suggerimenti per facilitare la memorizzazione delle addizioni e sottrazioni e delle tabelline.

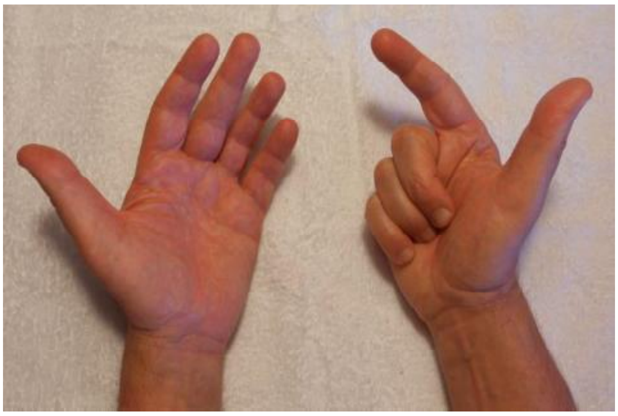
1.1 strategie di calcolo mentale, fascetti da cinque

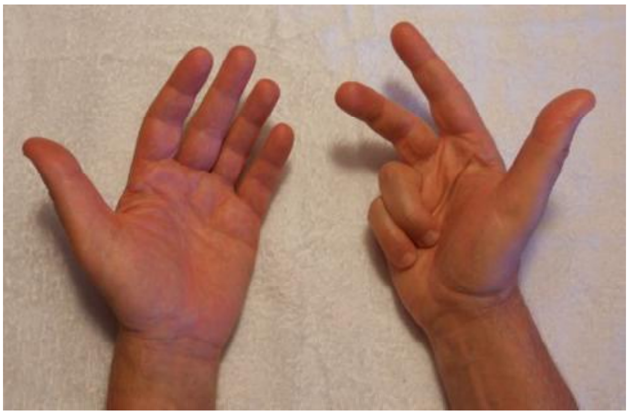
Presentiamo i piccoli numeri per scomposizione utilizzando i bastoncini.
Ad esempio presentiamo il numero 7 come un fascetto da 5 e 2 soli bastoncini sciolti.
Presentiamo il numero 8 come un fascetto da cinque e 3 soli bastoncini sciolti:





Naturalmente mostriamo ai bambini come rappresentare gli stessi numeri con le mani:





Vediamo come calcolare l'addizione 8+7.

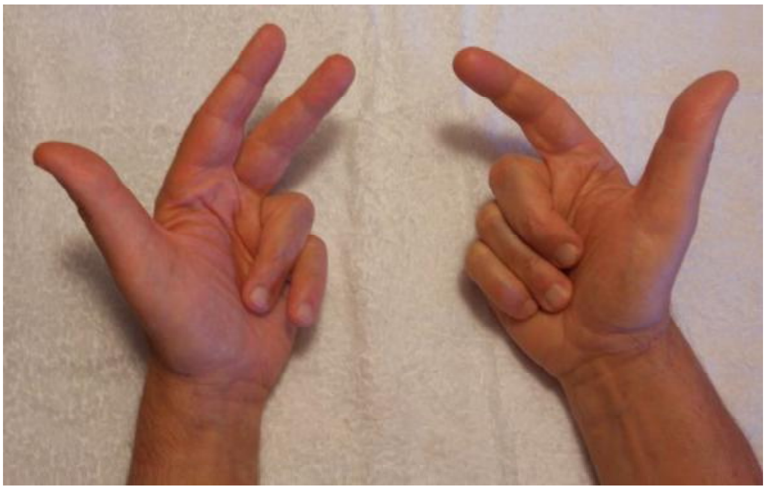
Prima mettiamo in colonna sul banco un fascetto da cinque e alla destra 3 bastoncini vicini e sotto un altro fascetto da cinque e due bastoncini da soli (incolonniamo le cinquine e le unità):

Invitiamo i bambini a sommare prima i due fascetti da cinque, per cui 5+5=10 e teniamo nella mente dieci.
Poi sommiamo le unità sciolte, 3+2=5, che si possono facilmente visualizzare.
Infine, sommiamo dieci con cinque ed otteniamo 15.

In questi primi passaggi, eseguendo diversi esempi con i bastoncini, i bambini devono annotare come ci siano sempre due mazzetti da cinque in ogni calcolo di questo tipo.

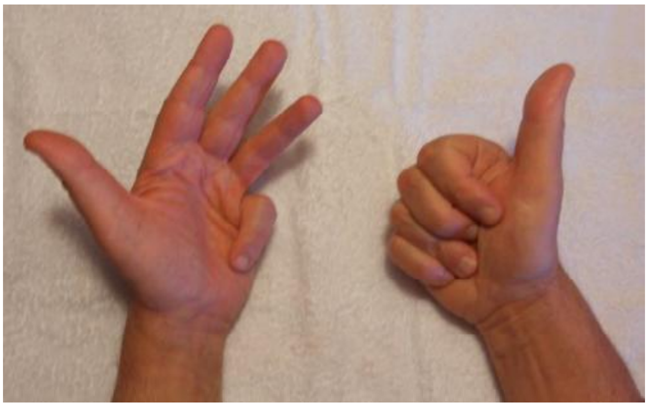
E' giunto il momento di eseguire gli stessi calcoli con le dita:

Invitiamo i bambini a rappresentare otto con una mano: prima cinque e poi 3 e lascio alzate le tre dita e poi 7 con la mano rimanente: prima cinque dita e poi 2 e lascio alzate le due dita.
In questo modo nelle due mani ho 3 e 2 dita alzate e faccio la somma cinque e aggiungo dieci che è la somma dei due fascetti da cinque e calcolo facilmente 15.



Prendiamo un altro esempio 9 + 6

Prima mettiamo in colonna sul banco un fascetto da cinque e alla destra 4 bastoncini vicini e sotto un altro fascetto da cinque e un bastoncino da solo (incolonniamo le cinquine e le unità):



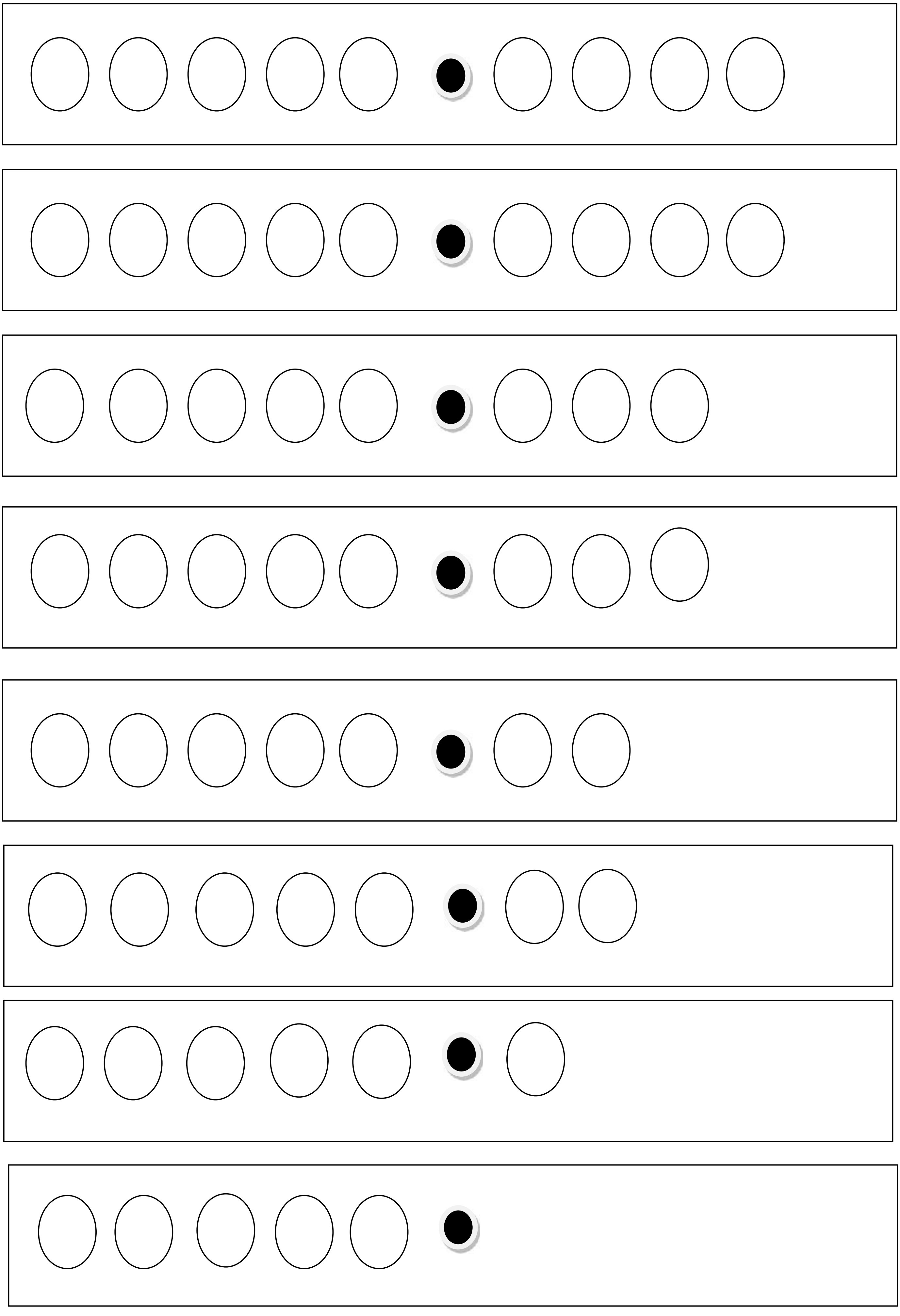
Invitiamo i bambini a rappresentare 9 con una mano: prima cinque e poi 4 e lasciare alzate le quattro dita e poi 6 con la mano rimanente: prima cinque dita e poi 1 e lasciare alzato un dito.

In questo modo nelle due mani ho 4 e 1 dita alzate e faccio la somma cinque e aggiungo dieci che è la somma dei due fascetti da cinque e calcolo facilmente 15.

Se abbiamo difficoltà a procurarci i bastoncini, possiamo usare un kit di cartoncini che rappresentano i numeri da 5 a 9 doppi, in modo da comporre tutte le addizioni entro il venti.

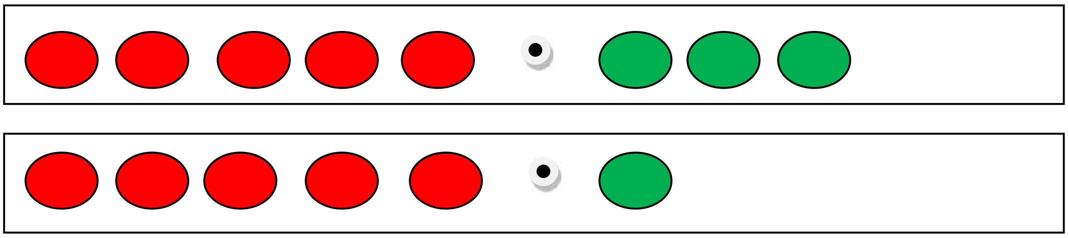
Si possono colorare di rosso le cinquine e di verde le palline a destra del puntino.

Nella pagina seguente potete fotocopiare i cartoncini da distribuire e colorare.



Ad esempio facciamo 8 + 6

I bambini prendono dal loro kit di cartoncini il numero otto e il numero sei e visualizzano immediatamente le cinquine e le palline rimaste (nello stesso momento possono controllare con le mani):

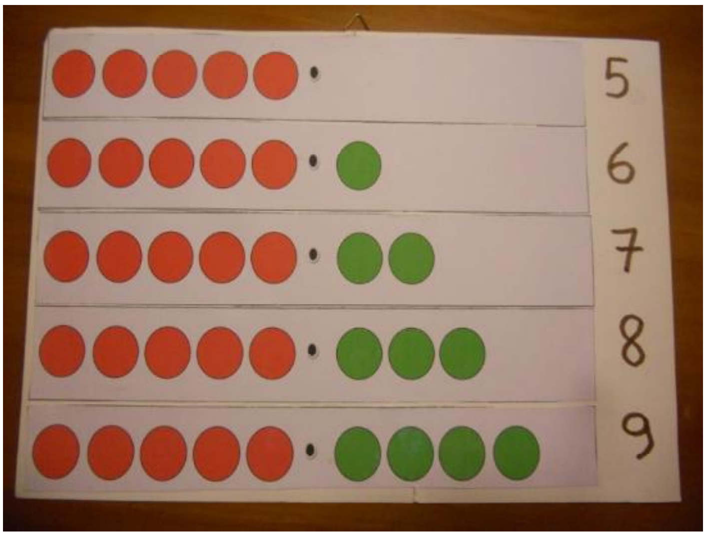


E' facile fare per loro 3+1 fa 4 più dieci delle palline rosse e otteniamo 14.

Proponiamo più volte esercizi di questo tipo, in modo che i bambini arrivino a visualizzare le quantità e "vedere" il risultato con estrema facilità.

Naturalmente, se ci sono bambini che sono in grado di calcolare intuitivamente queste addizioni, non è il caso di costringerli ad eseguirli con questa procedura, ma lasciarli liberi.

Possiamo attaccare un cartellone come nella foto dove i bambini possono visualizzare le palline dal cinque al dieci.



capitolo quarto

LA SOTTRAZIONE

1.4 LA TECNICA DELLA SOTTRAZIONE SENZA PRESTITO: "UNO DI MENO – UNO DI PIU'"

Con un semplice trucchetto matematico si possono calcolare tutte le sottrazioni in colonna, senza usare il prestito.

Ad esempio:

```
3 7 3 -
2 8 7 =
------
```

- La prima cosa da fare è osservare la prima cifra a sinistra del minuendo: In questo caso, il 3 delle centinaia che sarebbero 300 unità.

- Se sottraiamo 300-1=299, per cui ora possiamo eseguire 299-287 e non abbiamo nessun prestito:

```
2 9 9 -
2 8 7 =
------
0 1 2 +
  7 4 =
------
  8 6
```

- Poi aggiungiamo il rimanente del minuendo, che non abbiamo utilizzato, cioè 73 + 1, che era l'uno tolto allo stesso minuendo all'inizio e che ora dobbiamo restituire, e formiamo 74 che sommiamo al risultato.

Facciamo un altro esempio: 3246-879

3 2 4 6	2 9 9 9	- 1
- 8 7 9	- 8 7 9	
	2 1 2 0	
	2 4 7	+ 1
	2 3 6 7	

- Abbiamo tolto uno a tre mila e ottenuto 2999 che è il nostro nuovo minuendo.
- Sottraiamo 2999 con 879 e otteniamo 2120.
- Ora dobbiamo aggiungere la parte del primo minuendo che non è stata calcolata e "uno" che abbiamo tolto a tre mila, ossia 247.

ESERCIZI - usa il trucchetto di "uno di meno uno di più":

a 352-187= b 623-389= c 412-287= d 624-388= e 832-295=

f 6234-3878= g 7825-3487= h 9236-5877=

---

a 165 b 234 c 125 d 236 e 537 f 2356 g 4338 h 3359

12.4 LA SOTTRAZIONE CON I NUMERI COMPLEMENTARI

Il percorso del capitolo precedente dello scambio aiuta il bambini a capire la tecnica dei numeri complementari. Comunque se l'insegnante ritiene di passare direttamente ai numeri complementari senza passare per lo scambio, è possibile.

La tecnica dei numeri complementari è facile da apprendere, incredibilmente veloce soprattutto con numeri grandi e possibile quando si hanno più sottraendi in una stessa operazione.

ATTENZIONE! Non si possono usare i numeri complementari per far comprendere il concetto della sottrazione, per cui si deve apprendere comunque il concetto di prestito o scambio.

La tecnica dei numeri complementari va usato per rendere più facile e veloce la sottrazione.

Ma quali sono i numeri complementari che ci servono? Facile. Semplicemente i numeri da 0 a 9.

Il complementare di 0 è 9 e viceversa.

Il complementare di 1 è 8 e viceversa.

Il complementare di 2 è 7 e viceversa.

Il complementare di 3 è 7 e viceversa.

Il complementare di 4 è 5 e viceversa.

<u>Nel nostro caso possiamo dire che se due numeri formati da una sola cifra danno come somma nove, sono complementari tra loro.</u>

13.4 LE REGOLE DELLA TECNICA DEI NUMERI COMPLEMENTARI

Ci sono quattro regole da rispettare per operare nella sottrazione con i numeri complementari.

1) Riscriviamo il sottraendo in termini del suo complementare. Con la pratica i bambini saranno in grado di fare questo passaggio a mente.
2) Aggiungiamo +1 alla colonna delle unità.
3) Scriviamo -1 alla sinistra dell'ultima colonna del sottraendo.
4) Aggiungiamo ad ogni cifra del minuendo il suo rispettivo complementare, senza dimenticare di operare con +1 e -1.

Analizziamo il primo esempio:

$$\begin{array}{r} 7\,3\,2\,6 \\ -\;4\,7\,8\,1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle -1}\quad\quad {\scriptstyle +1} \\ 7\,3\,2\,6 \\ +\;\;5\,2\,1\,8 \\ \hline 2\,5\,4\,5 \end{array}$$

- Abbiamo scritto la sottrazione a destra sostituendo le cifre del sottraendo con i rispettivi numeri complementari.
- Scriviamo +1 sopra la colonna delle unità e -1 a sinistra dell'ultima cifra del sottraendo.
- La sottrazione si è trasformata in una addizione ed iniziamo dalla colonna delle unità, non dimenticando di calcolare anche +1.
- Quando arriviamo all'ultima colonna di sinistra, in questo caso delle migliaia, eseguiamo l'addizione 7+5 = 12 e scriviamo 2 sotto la linea di demarcazione. Il riporto 1 verrà eliminato da -1 che abbiamo scritto in precedenza.

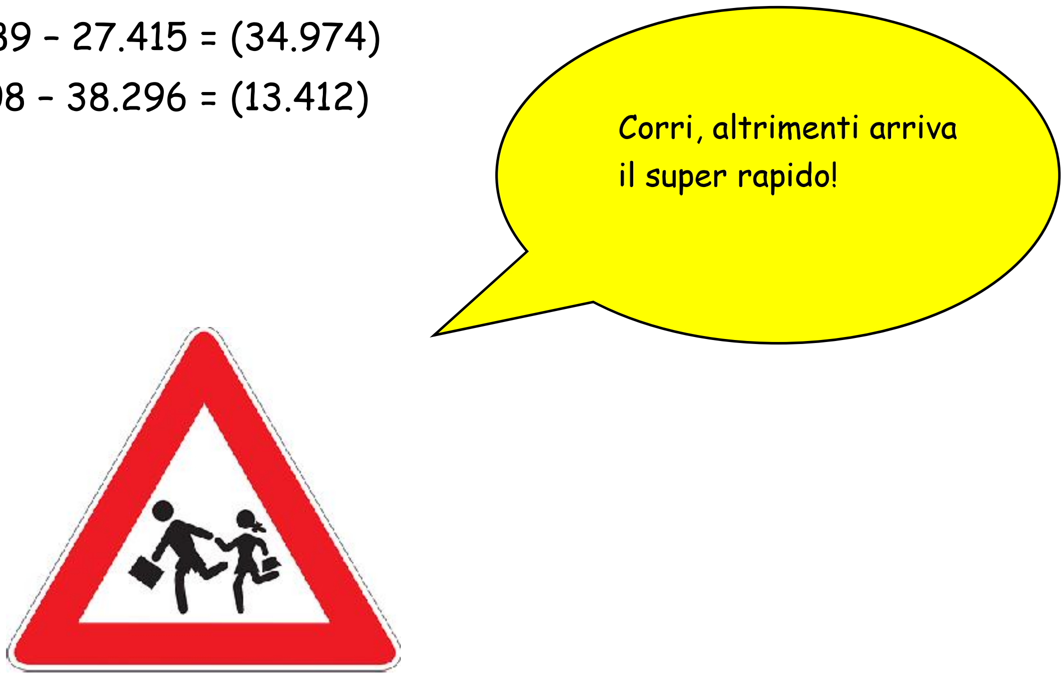
ESERCIZI

Risolvi le sottrazioni usando la tecnica dei numeri complementari come da modello.

$$\begin{array}{rr} & 60403 \\ - & 27819 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} & {\scriptstyle -1} \quad\quad {\scriptstyle +1} \\ & 60403 \\ + & 72180 \\ \hline & 32584 \end{array}$$

ESERCIZI

a) 72.416 – 16.937 = (55.479)
b) 86.402 – 58.947 = (27.455)
c) 61.073 – 26.985 = (34.088)
d) 80.196 – 47.325 = (32.871)
e) 68.236 – 42.827 = (25.409)
f) 62.389 – 27.415 = (34.974)
g) 51.708 – 38.296 = (13.412)



14.4 LA DIMOSTRAZIONE DELLA TECNICA DEI NUMERI COMPLEMENTARI

Ragionando con i bambini facciamo rilevare che se aggiungo e poi sottraggo ad una addizione o sottrazione uno stesso numero, il risultato non cambia. Quindi se rispetto alla sottrazione 15 – 8 aggiungo +3 e poi sottraggo -3 ottengo sempre lo stesso risultato.

Chiarito questo passaggio, se i bambini hanno appreso il calcolo della sottrazione con il metodo dello "scambio" sanno che una sottrazione qualsiasi si presenta in questo modo:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 10} \\
 & & 7 & 3 & 2 & 6 \\
- & & 4 & 7 & 8 & 1 \\
\cline{3-6}
\end{array}
$$

Ora facciamo alcuni piccoli cambiamenti. Il dieci finale lo cambiamo con +9 e +1. A questo punto l'operazione appare così:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & & & {\scriptstyle 1} \\
 & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 9} \\
 & & 7 & 3 & 2 & 6 \\
- & & 4 & 7 & 8 & 1 \\
\cline{3-6}
\end{array}
$$

Analizzando la nuova situazione vediamo che in ogni colonna abbiamo fatto in modo di aggiungere un nove al minuendo e poi di sottrarre la cifra del sottraendo per ogni colonna.

Ma questa procedura può essere abbreviata semplicemente aggiungendo il complementare di ogni cifra del sottraendo.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 1 & \\ -1 & & & & +1 \\ & 7 & 3 & 2 & 6 \\ - & 5 & 2 & 1 & 8 \\ \hline & 2 & 5 & 4 & 5 \end{array}$$

Nella colonna delle unità aggiungiamo al 6 il complementare di 1 che è 8 e abbiamo 14 che sommato a +1 dà 15 e scriviamo 5 sotto la linea di demarcazione e riportiamo 1 nella colonna delle decine.

Nella colonna delle decine aggiungiamo al 2 l'uno del riporto e abbiamo 3 e aggiungiamo il complementare di 8 che è 1, quindi abbiamo 4 che scriviamo sotto la linea di demarcazione.

Nella colonna delle centinaia aggiungiamo al 3 del minuendo il complementare del 7 che è 2 per cui abbiamo 5 che scriviamo sotto la linea di demarcazione.

Nella colonna delle migliaia aggiungiamo a 7 il complementare di quattro che è 5 e abbiamo 12. Scriviamo 2 sotto la linea di demarcazione e il riporto uno si annulla con -1 che avevamo scritto fin dall'inizio.

15.4 SOTTRAZIONI CON PIU' SOTTRAENDI

La tecnica dei numeri complementari permette di calcolare con facilità e rapidità anche operazioni complesse che contengono più sottraendi.

Questo tipo di operazioni non sono neanche previste con i metodi tradizionali perché è difficoltoso trovare un modo facile e comprensibile da spiegare ai bambini. Eppure nella vita reale capita di dover calcolare operazioni con più sottraendi.

La regola è sostanzialmente la stessa: ogni sottraendo deve essere riscritto nel suo complementare. Mettendo in colonna i diversi numeri, se manca una cifra rispetto alle altre, poniamo lo zero al posto della cifra mancante e nel calcolo sappiamo che il complementare dello zero è nove.

ATTENZIONE! Essendoci più sottraendi, non avremo da calcolare soltanto +1 ma ripeterlo tante volte quanti sono i sottraendi e lo stesso discorso vale per il -1.

Ma andiamo ad analizzare un esempio:

				-3 +3
	5 3 7			5 3 7
	2 2 4			2 2 4
-	4 6 3	→		5 3 6
-	5 2 8	→		4 7 1
	8 6 6			8 6 6
-	0 2 7	→	+	9 7 2
				6 0 9

In questa operazione abbiamo tre sottraendi. Come indicato dalle frecce trasformiamo ogni sottraendo nel suo complementare rispetto al nove.

Essendoci tre sottraendi scriviamo in alto, sulla colonna delle unità +3 e a sinistra dell'ultima cifra delle centinaia -3.

Addizioniamo iniziando dalla colonna delle unità e procediamo verso destra, ricordandoci di calcolare anche +3.

Arrivati all'ultimo calcolo della colonna delle centinaia abbiamo 36, scriviamo sei e riportiamo 3 che va annullato con -3.

ESERCIZI

Esegui le sottrazioni usando la tecnica dei numeri complementari.

3.787 – 251 – 1846 = (1.690)

8.306 – 421 – 594 = (7.291)

9.120 – 6.285 – 65 = (2.770)

7.312 – 465 – 80 = (6.767)

2.306 – 432 – 10 = (1.864)

7.026 – 1.823 – 3.290 = (2.093)

7.206 – 1.693 – 67 = (5.446)

7.068 + 6.129 – 1.853 – 2.670 = (8.674)

5.208 – 2.661 + 9.047 – 1.932 = (9.662)

16.4 APPLICAZIONI PARTICOLARI

La tecnica dei numeri complementari potrebbe essere usata per tutte quelle situazioni che possono creare difficoltà e lentezza nei calcoli.

Vediamo alcuni esempi:

```
                          -1    +1
  74865                    74865
- 00097   ------------>  + 99902
 -------                 -------
                           74768
```

Il sottraendo ha dei posti vuoti rispetto al minuendo, per cui riempiamo i vuoti con la cifra zero il cui complementare è nove.

Trasformiamo il sottraendo, compresi gli zeri nel suo complementare.

Eseguiamo i calcoli sommando le cifre, colonna per colonna, partendo dalle unità e non dimentichiamo +1 e -1.

Analizziamo un altro esempio:

```
                          -1    +1
  50062                    50062
- 00012   ------------>  + 99987
 -------                 -------
                           50050
```

Trasformiamo la sottrazione in un'addizione, sostituendo il sottraendo con il suo complementare, compresi gli zeri.

ESERCIZI

Aggiungi al minuendo i numeri complementari del sottraendo, colonna per colonna, partendo da destra verso sinistra.

40.913 – 7.346 = (33.567)

69.408 – 787 = (68.621)

86.100 – 9.824 = (76.276)

81.210 – 186 = (81.024)

60.573 – 9.099 = (51.474)

33.769 – 423 = (33.346)

10.001 – 724 = (9.277)

55.607 – 8.428 = (47.179)

89.734 – 567 = (89.167)

12.169 – 8.759 = (3.410)

67.814 – 780 = (67.034)

98.427 – 1.698 = (96.729)

70.010 – 89 = (69.921)

60.000 – 38 = (59.961)

Capitolo cinque

IL METODO DI BILL HANDLEY NELLA MOLTIPLICAZIONE

1.5 CONOSCI LE TABELLINE?

Conosci le tabelline? Sai anche la tabellina del quindici o del dodici? Sai risolvere a mente la moltiplicazione 14x16 oppure 94x97?

Con questo metodo riuscirai a risolvere moltiplicazioni con facilità e con maggiore velocità rispetto ai metodi tradizionali. E soprattutto con più creatività e meno fatica.

Bill Handley racconta: "Mi è accaduto di avere una bambina di nome Trudy, alla quale avevo insegnato il mio metodo per risolvere le moltiplicazioni. Poi le avevo chiesto quanto veniva 14x14 e lei, velocemente e senza scrivere nulla, mi ha dato la soluzione. Le ho chiesto se sapeva già la risposta. Mi ha detto di no; ma, mentre eseguiva i calcoli, la risposta è venuta da sé."

Anche noi, come Trudy, eseguiamo moltiplicazioni con la tecnica del ricercatore Bill Handley.

Vediamo l'esempio 8x6 e fingiamo di non sapere il risultato. Per prima cosa scriviamo in riga l'operazione e sotto ogni fattore disegniamo una casella. Poi ci domandiamo: per ogni fattore quanto manca per arrivare a dieci? Iniziamo con otto e sappiamo facilmente che mancano due unità e le scriviamo nella casella sotto l'otto. Ora consideriamo il sei e troviamo subito che mancano quattro unità per arrivare a dieci e scriviamo 4 nella casella sotto il fattore sei:

$$\begin{array}{ccccc} 8 & \times & 6 & = & 48 \\ \boxed{2} & \times & \boxed{4} & & \end{array}$$

Chiameremo i numeri nelle caselle: le <u>differenze</u>.

Una volta trovate le differenze, sottraiamo diagonalmente i fattori con le differenze, 8-4=4 e 6-2=4 e notiamo che i risultati sono sempre uguali, per cui conviene sempre farne uno, scegliendo quello che ci rimane più facile.

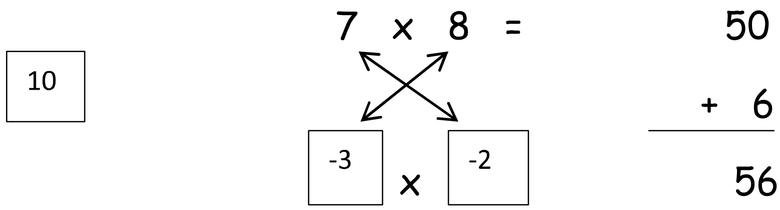
Il risultato di questa sottrazione, cioè 4, lo scriviamo come prima cifra a sinistra del prodotto finale. Per la seconda cifra della risposta moltiplichiamo tra loro le differenze 2x4=8 e scriviamo otto accanto al quattro. In questo modo otteniamo il prodotto finale 48.

Sicuramente questa tecnica è più facile e meno noiosa del ripetere tante volte le tabelline per apprenderle a memoria.

2.5 MOLTIPLICO USANDO LE BASI

In questo paragrafo mostreremo dei piccoli cambiamenti, per approfondire la tecnica appena vista.

Analizziamo l' esempio 7 x 8 = 56



Il dieci alla sinistra è la base di riferimento sia del sette che dell'otto. Infatti le differenze rispetto a questa base sono 3 e 2 ed hanno il segno meno in quanto i fattori sono inferiori alla base di riferimento.

Nella parte destra abbiamo scritto 50 che si ottiene sottraendo 7-2=5 e poi si moltiplica 5x10 = 50. Possiamo fare anche 8-3 = 5 e 5x10 = 50.

Infine moltiplichiamo le differenze (-3) x (-2) = +6 che sommiamo a cinquanta e otteniamo il prodotto finale 56.

Per quest'ultima moltiplicazione possiamo dire ai bambini che mettiamo le parentesi per non confonderci con i segni.

ESERCIZI

Calcola le tabelline usando la tecnica della base di riferimento.

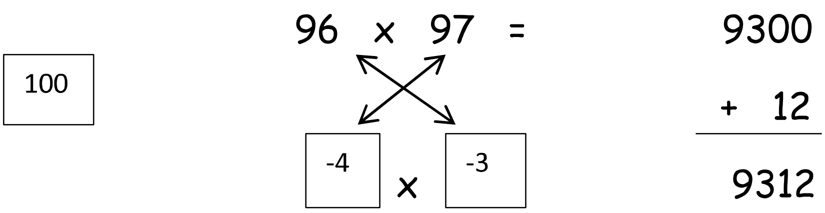
Attenzione! E' molto importante provare a risolvere questi esercizi a mente, senza scrivere nulla.

a) 6x7=	b) 7x5=	c) 8x5=
d) 6x5=	e) 9x9=	f) 8x8=
g) 7x7=	h) 8x9=	i) 9x6=
l) 5x9=	m) 6x9=	n) 7x9=

3.5 BASE DI RIFERIMENTO CENTO

La tecnica appena vista può essere usata anche con numeri che hanno come base di riferimento cento.

Vediamo l'esempio 96 x 97.



Abbiamo trovato le differenze dei due fattori in riferimento alla base cento che sono rispettivamente (-4) e (-3). Sottraiamo diagonalmente 96-3=93 e moltiplichiamo 93x100 = 9300.

Ora moltiplichiamo le differenze tra loro (-4) x (-3) = +12 che sommiamo a 9300 e otteniamo il prodotto finale 9312.

Analizziamo un altro esempio: 98 x 98

100

98 x 98 = 9600

-2 x -2

+ 4

9604

Abbiamo trovate le differenze dei due fattori rispetto alla base cento e sono (-2) e (-2). Sottraiamo 98-2=96 che moltiplichiamo per cento e abbiamo 9600 che scriviamo a destra.

Ora moltiplichiamo le due differenze (-2) x (-2) = +4 che sommiamo a 9600 e abbiamo come prodotto finale 9604.

ESERCIZI

Usa la tecnica della base di riferimento cento.

a) 96 x 96 = (9216)
b) 97 x 97 = (9409)
c) 99 x 99 = (9801)
d) 95 x 95 = (9025)
e) 98 x 97 = (9506)
f) 98 x 96 = (9408)
g) 99 x 96 = (9504)
h) 97 x 99 = (9603)
i) 98 x 99 = (9702)

4.5 NUMERI SOPRA LE BASI DI RIFERIMENTO

Analizziamo l'esempio 13x15 dove la base di riferimento è dieci.

$$\boxed{10} \qquad \begin{array}{ccc} 13 & \times & 15 \\ \boxed{+3} & \times & \boxed{+5} \end{array} = \begin{array}{r} 180 \\ +\ 15 \\ \hline 195 \end{array}$$

Le differenze hanno il segno più davanti perché, rispetto alla base dieci, sono maggiori.

Sommiamo diagonalmente ad esempio 15+3=18 che moltiplichiamo per dieci e otteniamo 180.

Moltiplichiamo (+3) x (+5) = +15 che sommiamo a 180 e abbiamo come prodotto finale 195.

Possiamo ricavare una prima regola:

"se le differenze hanno il segno più davanti, allora sommiamo diagonalmente. Se le differenze hanno il segno meno davanti, allora sottraiamo diagonalmente."

Vediamo un altro esempio: 13 x 21

$\boxed{10}$ $\quad 13 \times 21 =$

$\boxed{+3} \times \boxed{+11}$

$$\begin{array}{r} 240 \\ +\ 33 \\ \hline 273 \end{array}$$

Abbiamo le differenze (+3) e (+11) rispetto alla base dieci. Eseguiamo la somma in diagonale, ad esempio 21+3=24 che moltiplichiamo per dieci e abbiamo come primo risultato parziale 240.

Moltiplichiamo (+3) x (x11) = +33 che sommiamo a 240 e abbiamo come prodotto finale 273.

ESERCIZI

Usa la tecnica delle basi di riferimento.

a) 12 x 15 = (180)
b) 13 x 14 = (182)
c) 12 x 12 = (144)
d) 13 x 13 = (169)
e) 12 x 14 = (168)
f) 12 x 16 = (192)
g) 14 x 14 = (196)
h) 15 x 15 = (225)
i) 12 x 18 = (216)
j) 16 x 14 = (224)
k) 12 x 21 = (252)
l) 13 x 24 = (312)
m) 11 x 11 = (121)

5.5 MOLTIPLICAZIONI DI NUMERI SOPRA LA BASE 100

Analizziamo l'esempio 113 x 102 = 11.526

$\boxed{100}$	113 x 102 =	11.500
		+ 26
	$\boxed{+13}$ x $\boxed{+2}$	11.526

Mettiamo le differenze con il segno più davanti, essendo entrambi i fattori superiori alla base cento.

Eseguiamo l'addizione in diagonale, ad esempio 113 + 2 = 115 che moltiplichiamo per cento e abbiamo 11.500 come primo prodotto.

Moltiplichiamo le differenze tra loro (+13) x (+2) = +26 che sommiamo a 11.500 e abbiamo come prodotto finale 11.526.

ESERCIZI

a) 108 x 102 = (11.016)
b) 107 x 107 = (11.449)
c) 103 x 104 = (10.712)
d) 101 x 121 = (12.221)
e) 102 x 112 = (11.424)
f) 104 x 104 = (10.816)
g) 105 x 110 = (11.550)
h) 109 x 108 = (11.772)
i) 108 x 106 = (11.448)

6.5 MOLTIPLICAZIONI SOPRA E SOTTO LA BASE DI RIFERIMENTO

Vediamo subito un esempio: 8 x 14

$\boxed{10}$ 8 x 14 =   120

$\boxed{-2}$ x $\boxed{+4}$ - 8

112

Troviamo le differenze in riferimento alla base dieci che sono (-2) e (+4).

Sottraiamo diagonalmente 14-2= 12 che moltiplichiamo per 10 e abbiamo come primo prodotto parziale 120.

<u>Ora avviene il cambiamento!</u>

Dovendo moltiplicare le differenze tra loro (-2) x (+4) = -8, cioè avendo segni contrari, il risultato ha segno negativo. Per questo motivo dobbiamo sottrarlo a 120 e abbiamo come prodotto finale 112.

Vediamo un esempio con numeri maggiori: 97 x 125.

$\boxed{100}$ 97 x 125 =   12.200

$\boxed{-3}$ x $\boxed{+25}$ - 75

12.125

Abbiamo come base di riferimento cento. Troviamo le rispettive differenze e abbiamo (-3) e (+25).

Operiamo diagonalmente con le differenze, ad esempio 125-3 = 122 che moltiplichiamo per la base 100 e abbiamo come primo prodotto parziale 12.200.

Moltiplichiamo le differenze tra loro (-3) x (+25) = -75 che avendo davanti segno negativo verrà sottratto a 12.200 e abbiamo come risultato finale 12.125.

A questo punto possiamo ricavare altre due regole importanti:

1) *Quando entrambi i numeri delle differenze sono sopra o sotto la base di riferimento, sommiamo la risposta.*
2) *Quando un numero delle differenze è sopra e l'altro sotto rispetto alla base di riferimento, allora sottraiamo la risposta.*

ESERCIZI

a) 9 x 15 = (135)
b) 8 x 12 = (96)
c) 98 x 145 = (14210)
d) 98 x 125 = (12250)
e) 95 x 120 = (11400)
f) 9 x 34 = (306)
g) 8 x 26 = (208)

7.5 MOLTIPLICAZIONI USANDO QUALSIASI BASE DI RIFERIMENTO

Finora abbiamo analizzato fattori che sono vicini alla base dieci oppure alla base cento e questo, senza dubbio, facilita il procedimento.

Ma cosa succede se utilizziamo basi come 30 oppure 60 ecc.? Si può usare il metodo? CERTAMENTE.

Prendiamo in considerazione come base di riferimento 20. Diciamo subito che è facile usare la base venti, in quanto possiamo moltiplicare per dieci e per due. Ma anche con le altre basi non è difficile, ad esempio se consideriamo la base 40, moltiplicheremo per quattro e per dieci.

Questi numeri che sono la scomposizione delle basi si chiamano fattori, per cui possiamo chiamare la procedura: MOLTIPLICAZIONE PER FATTORI.

Consideriamo la moltiplicazione 23 x 21

$\boxed{20}$ 23 x 21 = 24 x 2 x 10 = 480

$\boxed{+3}$ x $\boxed{+1}$

$$\begin{array}{r} 480 \\ +\ 3 \\ \hline 483 \end{array}$$

Tutto procede come al solito, l'unica differenza è dovuta dal fatto che abbiamo moltiplicato 24 x 2 x 10 = 480.

Vediamo un esempio con la base di riferimento quaranta: 38 x 64.

$\boxed{40}$

38 x 64 = 62 x 4 x 10 = 2.480

$\boxed{-2}$ x $\boxed{+24}$ - 48

2.432

In questo caso abbiamo scelto la base 40, per cui dobbiamo moltiplicare per quattro e per dieci.

ESERCIZI

a) 24 x 24 = (576)
b) 32 x 44 = (1408)
c) 45 x 45 = (2025)
d) 34 x 65 = (2210)
e) 18 x 26 = (468)
f) 36 x 36 = (1296)
g) 62 x 85 = (5270)
h) 75 x 96 = (7200)

capitolo nove

LA DIVISIONE DIRETTA DELLA MATEMATICA VEDICA

PERCORSO PER ARRIVARE ALLA DIVISIONE CON DIVISORE A DUE CIFRE:

1.9 LA DIVISIONE CON PIU' RESTI A SCELTA

Supponiamo di dover dividere 10 per 3. La risposta immediata è sicuramente 3 resto 1. Ma ci sono altre risposte possibili e corrette:

10:3=2.4

10:3=1.7

Tutte queste risposte sono corrette per cui possiamo selezionare la risposta più adatta a facilitare la divisione che stiamo operando.

Perché fare questo tipo di divisioni?

Dobbiamo abituare gli alunni a vedere diverse possibilità di una divisione, in quanto quando procediamo in una divisione in colonna, capita spesso di dover cambiare il quoziente provvisorio e questo procedimento non è altro che una visualizzazione della stessa divisione in più possibilità.

ESERCIZI:

completa la divisione trascrivendo il resto mancante:

a 31:5 = 6 r…… b 51:7 = 6 r….. c 30:4 = 6 r ….. d 22:3 = 7 r…..

e 42:5 = 6 r…… f 39:6 = 4 r…… g 26:5 = 4 r……. h 30:7 = 4 r…..

---

a 1 b 9 c 6 d 1 e 12 f 15 g 6 h 2

2.9 LA DIVISIONE CON DIVISORE AD UNA CIFRA

Prima di iniziare la "divisione diretta" è bene familiarizzare con la divisione dove abbiamo un divisore ad una cifra, perché la divisione diretta, anche se ha divisori a due cifre, si svolge come se fosse una divisione con divisore ad una cifra.

Vediamo un esempio: 3846 : 4

$$3\ 8\ {}_{2}4\ {}_{0}6 : 4 = 9\ 6\ 1 \text{ r.}2$$

Come si vede dall'esempio, la divisione si svolge in una sola riga.

Vediamo lo svolgimento nei dettagli:

- il 4 nel 3 non è compreso, per cui prendiamo in considerazione due cifre. Il 4 nel 38 è compreso nove volte con il resto di 2. Il 9 diventa la prima cifra del quoziente.

- scriviamo il 2 in piccolo davanti alla cifra 4 del dividendo e diviene 24. Il 4 nel 24 è compreso sei volte con il resto di zero. Il 6 diventa la seconda cifra del quoziente.

- scriviamo lo zero davanti alla cifra 6 del dividendo, che rimane 6. Il 4 nel 6 è compreso una volta con il resto di 2. Scriviamo l'uno come terza cifra del quoziente.

Se non desideriamo continuare, Il risultato della divisione è 3846:4=961 r.2

Naturalmente, solo quando gli studenti saranno abili e veloci con questo tipo di divisione, potranno svolgere la "divisione diretta", senza difficoltà.

ESERCIZI:

a) 6846:6= 1141 r.0
b) 3254:3= 1084 r.2
c) 9824:6= 1637 r.2

3.9 LA DIVISIONE DIRETTA DELLA MATEMATICA VEDICA

E' giunto il momento di presentare un metodo facile e veloce di operare con le divisioni che hanno come divisore due cifre e che chiamiamo "la divisione diretta" chiamata dall'autore Krishna Tirthaji "la gemma incoronata".

E' molto simile alla divisione corta, quando abbiamo come divisore un numero ad una sola cifra.

Vi assicuriamo che se arriverete a padroneggiare il metodo della divisione diretta, parenti ed amici penseranno che siete dei geni in matematica.

Alcuni aspetti importanti:
- Pur essendo il divisore a due cifre, si procederà come se fosse un divisore ad una cifra.
- Se la prima cifra del dividendo è inferiore alla prima cifra del divisore, allora utilizziamo le prime due cifre del dividendo per fare la prima divisione parziale.

Consideriamo l'esempio: 195 : 32

Trentadue è come numero vicino alla decina trenta per cui scriveremo come divisore 3^{-2} ossia il -2 sta a significare che per arrivare a trenta togliamo due.

A questo punto le divisioni parziali si svolgono tutte con la cifra 3 del divisore.

Iniziamo la divisione vera e propria:

- Il divisore tre nell'uno non è compreso, per cui prendiamo le prime due cifre del dividendo, cioè 19.
- Il tre nel diciannove è compreso sei volte. 6x3 = 18, per arrivare a diciannove manca di uno che scriviamo in piccolo davanti al cinque del dividendo.

$$1\ 9\ {}_{1}5 : 3^{-2} = 6$$

- Moltiplichiamo il 6 del quoziente per il (-2) del divisore e abbiamo 12 che va sottratto al 15 e otteniamo 3

$$1\ 9\ {}_{1}5 : 3^{-2} = 6 \text{ resto } 3.$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \hline 3 \end{array}$$

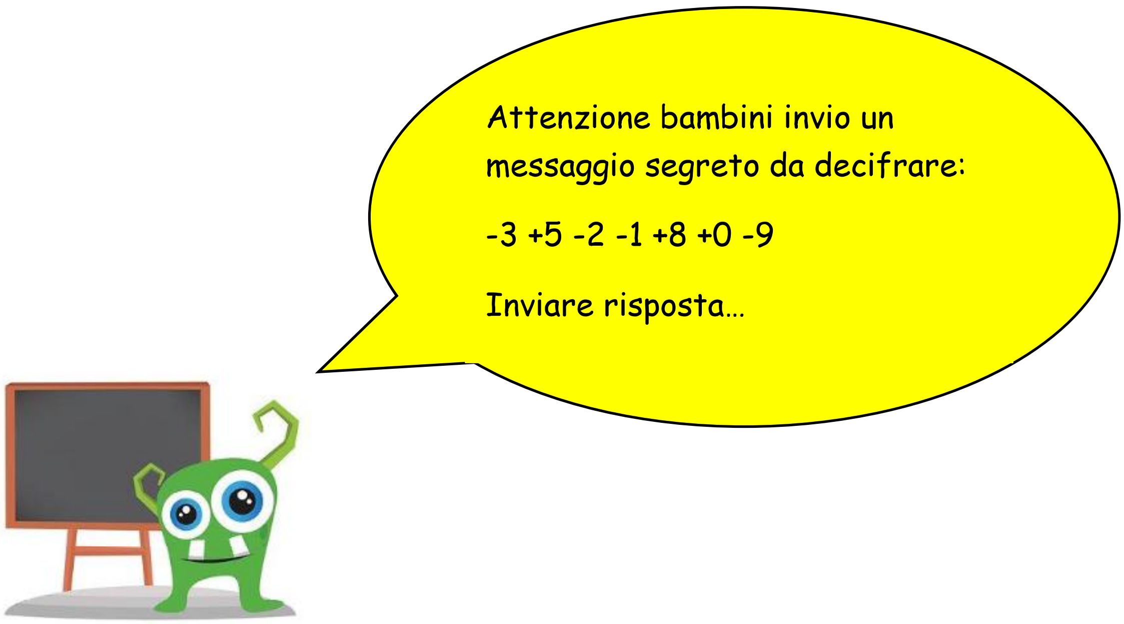
- Se terminiamo la divisione a questo punto abbiamo quoziente 6 e resto 3.

Se come divisore abbiamo come prima cifra 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7, allora prendiamo come riferimento la decina che viene prima e scriviamo come esponente questi numeri con il segno meno davanti.

Ad esempio, se abbiamo come divisore 46, scriveremo 4^{-6}, se abbiamo 27 scriveremo 2^{-7}.

La situazione cambia se abbiamo come prima cifra del divisore 8 oppure 9.

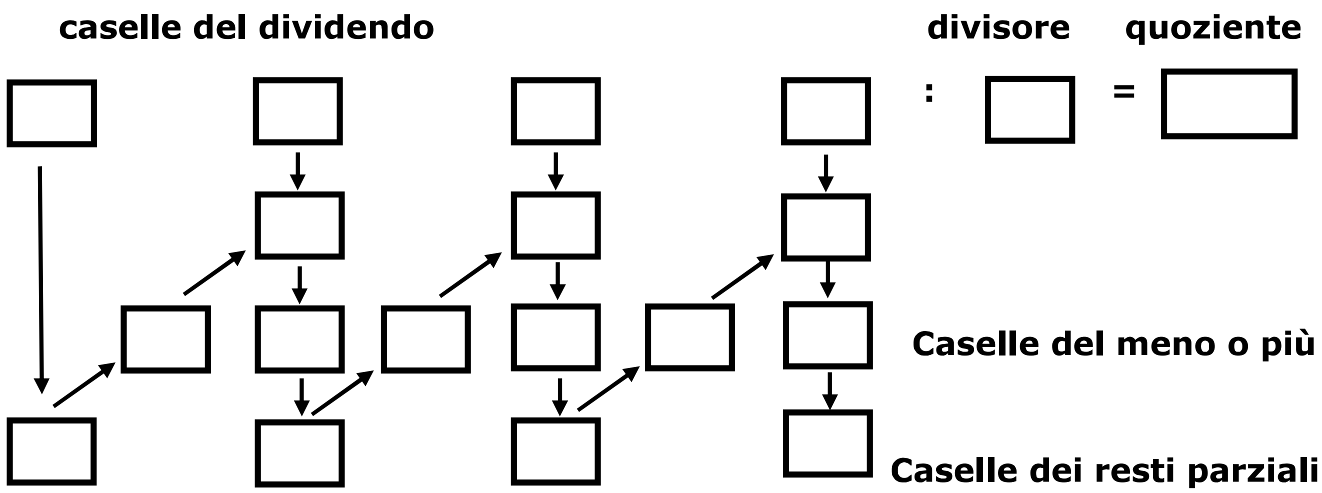
Ad esempio 38. Allora consideriamo come decina la più vicina, in questo caso quaranta e scriveremo come divisore 4^{+2}. Significa che aggiungiamo due per arrivare alla decina quaranta.Analizzeremo questo ultimo tipo di esempio nei dettagli più avanti.



4.9 LA GRIGLIA DI LAVORO

Consigliamo di distribuire agli alunni una fotocopia con disegnata una griglia che permette di proseguire nei diversi passaggi della divisione senza il rischio di dimenticare qualche passaggio.

Inoltre, usando la griglia gli alunni arriveranno prima a memorizzare i vari passaggi, con minore sforzo mentale per ricordarli.



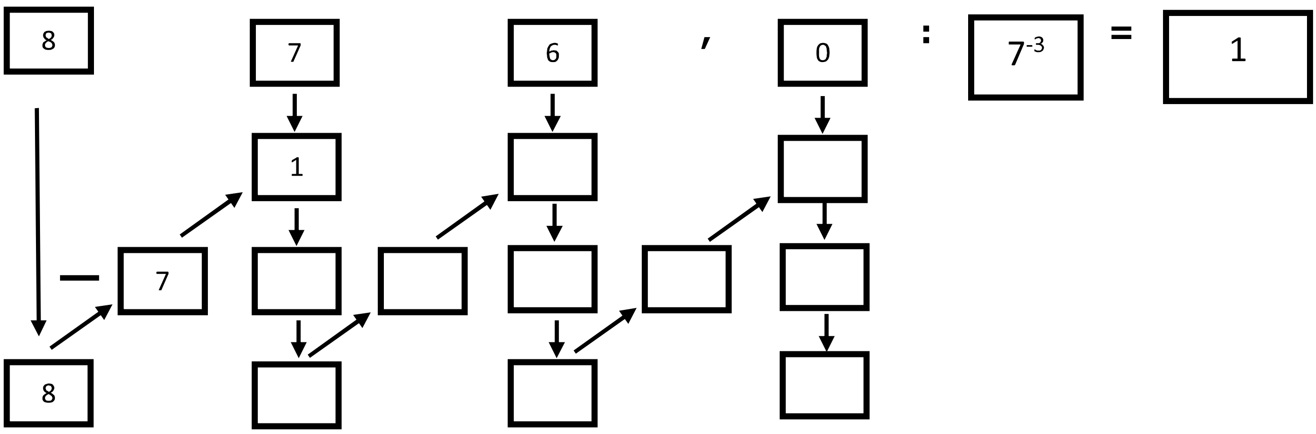
- La prima riga di caselle comprende il dividendo, il divisore ed infine il quoziente.
- Nella terza riga delle caselle, procedendo dall'alto in basso, si scrivono i numeri che vengono sottratti oppure aggiunti.
- Nell'ultima riga delle caselle si scrivono i resti parziali da dividere.

Alla fine del capitolo troverete le griglie da fotocopiare. Naturalmente questo tipo di divisione si può eseguire anche senza la griglia, semplicemente mettendo in colonna e lasciando uno spazio per la riga di lavoro e un altro per la riga dei resti parziali.

5.9 I SINGOLI PASSAGGI DELLA DIVISIONE DIRETTA

Riprendiamo il nostro esempio nei singoli passaggi e tutto risulterà chiaro.

876 : 73

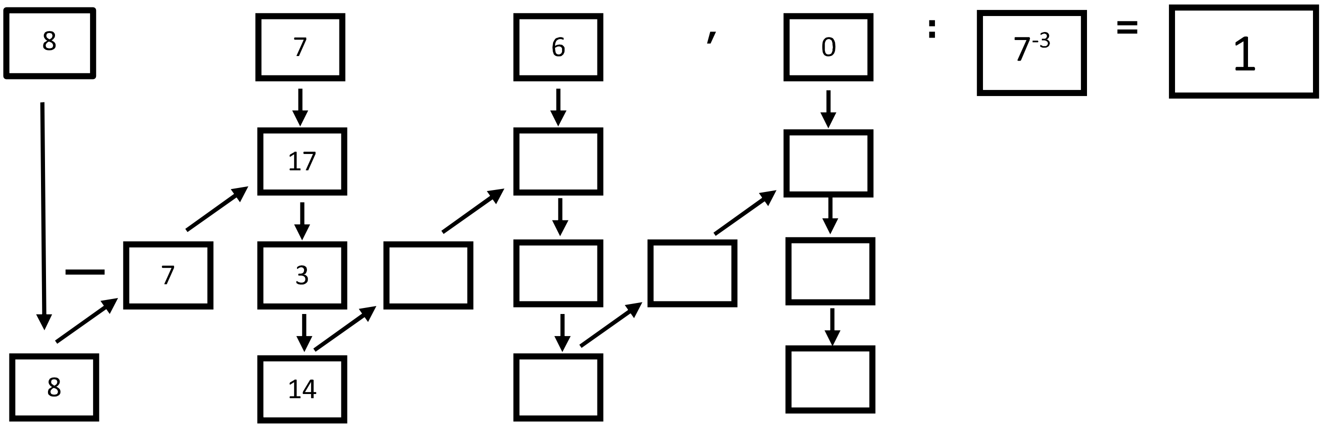


1) Prima di scrivere le singole cifre del dividendo vediamo se il sette del divisore è compreso nell'otto del dividendo. Essendo la risposta positiva scriviamo otto nella prima casella a sinistra e le altre cifre nelle caselle del dividendo.

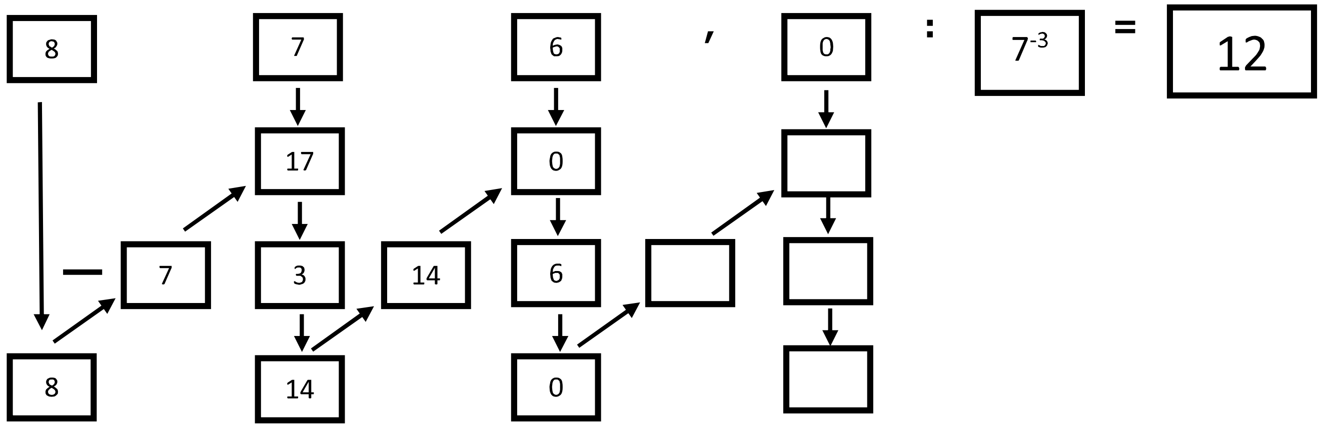
2) Per iniziare, abbassiamo la prima cifra del dividendo e dividiamo il 7 del divisore nel 8 del dividendo. Il sette è contenuto una volta per cui scriviamo 1 come prima cifra del quoziente.

3) Moltiplichiamo 1x7=7 e scriviamo il prodotto 7 ottenuto nella casella del meno come da immagine sopra. (<u>abbiamo le caselle del meno in quanto il divisore ha come esponente il segno meno</u>)

4) Poi sottraiamo il sette ottenuto all'otto del dividendo e otteniamo 1 che scriviamo sotto la colonna della cifra 7 del dividendo.



5) Abbassiamo la cifra 7 del dividendo e formiamo il 17. Moltiplichiamo 1x3=3 e sottraiamo il 3 dal 17 e otteniamo 14 che scriviamo nell'ultima riga come resto parziale.



6) Il 7 nel 14 è compreso 2 volte e scriviamo 2 come seconda cifra del quoziente.
7) Poi moltiplichiamo questo 2 per 7, 2x7=14 che sottraiamo al 14 e abbiamo zero che scriviamo sotto la casella del 6.
8) Abbassiamo il sei del dividendo accanto allo zero e abbiamo 06.
9) Moltiplichiamo due del quoziente per -3 del divisore e abbiamo 6 che sottraiamo al sei e abbiamo come resto finale zero.

In questo caso, essendo il resto finale zero, la divisione è terminata, per cui abbiamo:

$$876 : 73 = 12 \text{ r. } 0$$